Реферат на тему: «Роль математики в современном естествознании».

Антонов В. И.

14 мая 2005 г.

1 О математике...

Название "математика"произошло от греческого mathema - наука. Никто, конечно, не думает отрицать, что источником основных математических понятий, таких, как число или пространство, является чувственный опыт. Начиная примерно с 12 лет, если верить профессиональным психологам, небольшие натуральные числа или простые пространственные отношения (положение, величина и т. д.) могут рассматриваться как устойчивые, базирующиеся на опыте понятия, присущие всем нормальным людям и образующие субстрат соответствующих математических понятий.

Однако необходимо сразу же отметить одно обстоятельство: математические объекты, претендующие на выражение этих опытных понятий, наделяются математиками свойствами, которые явно выходят за пределы опыта. Возьмем, например, произвольное натуральное число: я сомневаюсь, что кто-либо обладает серьезной интуицией натурального числа, большего, чем 10 (я имею в виду непосредственное восприятие; насколько мне известно существуют психологические опыты в которых требуется, не считая , определить количество возникающих на экране точек, и при этом безошибочный ответ дается лишь тогда, когда число точек не превосходит 7). Понятия неограниченного продолжаемого натурального ряда чисел, бесконечной прямой и т.д. могут служить примером концепций, не имеющих непосредственного экспериментального обоснования. Существование точной верхней грани, постулат Евклида – все это, нельзя проверить экспериментально.

После двух векового раздумья над этими вопросами мы теперь знаем, что выбор аксиом производится математиками довольно произвольно, иногда из эстетических соображений или, по Пуанкаре, из соображений удобства; они вовсе не навязываются извне некоторыми явлениями или чувственной интуицией, которую мы можем иметь по отношению к ним.

Математический аппарат проник далеко за пределы собственно математики: в физику, новые отрасли техники, биологию, экономику и другие социальные науки.

Роль математики в современной жизни лучше всего можно оценить при поэтапном сравнении успехов ее развития. Всего три столетия назад, основы математики зиждились на геометрии, унаследованной нами от древних народов и лишь незначительно продвинувшейся за два тысячелетия. Затем началось стремительное и радикальное преобразование математики. Строгий аксиоматический дедуктивный стиль геометрии уступил место интуитивному индуктивному подходу, а чисто геометрические понятия - представлениям о числе и алгебраической операции, воплощенным в аналитической геометрии и математическом анализе, а также в механике. Небольшая группа ученых, относившаяся к так называемой математической аристократии, теперь стала ведущей в науке. Ко времени Великой французской революции математические науки достигли такого расцвета, что число людей, активно занимающихся научной деятельностью, значительно возросло. Появилась учебная литература, позволившая ознакомится с новыми достижениями математики; университеты стали систематически готовить специалистов в области естественных наук и математики. Открылись новые перспективы развития человеческих знаний.

"Классическая математика", возникшая в XVII в., и по сей день сохраняет свое огромное значение и ведущее положение. Некоторые из самых плодотворных работ появились в результате уточнения и обобщения двух основных понятий математического анализа: понятия функции (взаимной зависимости двух или более переменных) и понятия предела, вводящего интуитивное представление о непрерывности в жесткие рамки строгого исследования. В чрезвычайно расширившейся области современной математики мы постоянно сталкиваемся с понятиями математического анализа, в частности с теорией дифференциальных уравнений (как в обычных, так и в частных производных), - этим важнейшим инструментом исследования скорости изменения различных величин.

Для современной математики характерно закрепление достигнутых результатов в духе математической строгости. Такой подход привел к более интенсивной разработке оснований математики, детальному выяснению структуры самой математики и смысла существования объектов математического мышления.

Развитие математической науки неизбежно повлекло за собой специализацию и обособление; математика оказалась под угрозой потери единства и внутренней взаимосвязи. Представители различных отраслей математики стали хуже понимать друг друга, а связь математики с остальными науками заметно ослабла. Тем не менее, благодаря молодым талантам, пользовавшимся решительной поддержкой общества, которое осознало возрастающую роль математики, были достигнуты значительные успехи, а растущий объем математических исследований повлек за собой лавину публикаций и многочисленные конференции математиков. В связи с этим появилась настоятельная потребность в четком понимании существа математики, ее проблем и целей, а также отыскании идей, которые смогли бы объединить людей самых различных интересов.

Часто говорят, что цель математики - это последовательное абстрагирование, логически строгая аксиоматическая дедукция и последующее еще более широкое обобщение. Такая характеристика содержит лишь долю правды. Математика не владеет монополией на абстракцию. Понятие массы, силы, скорости, напряжения - все это абстрактные идеализации физической реальности.

Взаимосвязь общего с частным, дедукции с конструктивным подходом, логики с воображением - именно они и составляют самую сущность живой математики. Иоганн Кеплер с прозорливостью настоящего диагноста сумел абстрагировать из массы наблюдений Тихо Браге эллиптическую форму планетарных орбит. Дальнейшее абстрагирование позволило Исааку Ньютону вывести из этой модели закон всемирного тяготения и дифференциальные уравнения механики. На этом весьма высоком уровне, уже не отягощенном математическими абстракциями, механика обрела неограниченную свободу и, снизойдя до конкретных "земных"задач, продолжала добиваться успеха за успехом в областях, лежащих далеко за пределами небесной механики, откуда она ведет свое начало.

Подобным образом Майкл Фарадей установил в теории электромагнетизма ряд экспериментальных фактов, которые он связал воедино, дав им собственное остроумное толкование. Это позволило вскоре абстрагировать несколько математических качественных законов электромагнетизма. После того как эти законы были сформулированы для некоторых простых частных случаев, Джеймс Клерк Максвелл открыл весьма общий количественный закон, связывающий магнитные и электрические силы, а также скорости их изменения системой дифференциальных уравнений. Эти уравнения, абстрагированные и освобожденные от всего частного и конкретного, могут в начале показаться слишком недоступными для использования. Однако вскоре становится ясно, что уход Максвелла в высокие сферы абстракции проложил перед наукой путь к дальнейшему развитию по многим направлениям.

Гильберт, обобщая теорию главных осей обычных квадратичных форм конечного числа переменных на случай их бесконечного числа, открыл много новых явлений, например, возникновение "математического спектра". Более того, работы Гильберта сыграли немаловажную роль при возникновении квантовой механики. Его термин "математические спектры"оказался связанным со спектрами энергетических состояний атомов и частиц, их образующих. Правда, гильбертова теория квадратичных форм не совсем подходила для решения проблем квантовой механики; как выяснилось, в этих целях потребовались "неограниченные"формы.

Именно здесь фон Нейман, который был склонен к абстрагированию больше, чем его предшественники, сделал следующий решающий шаг в этом направления. Отказавшись от представления Гильбёрта о квадратичной форме как о чем-то, что может быть выражено в конкретной алгебраической форме (в виде бесконечной алгебраической суммы), фон Нейман взамен нашел такое абстрактное определение квадратичной форм, что сумел избежать ограничений, налагаемых гильбертовым подходом. Так расширенная гильбертова спектральная теория смогла дать ответ на вполне реальные и конкретные запросы современной физики.

Теория групп, являясь центральной в современной математике, прошла в своем развития аналогичный путь последовательных обобщений. Эта теория ведет свое начало от частной проблемы, привлекавшей к себе умы математиков еще в средние века. Речь идет об отыскания решений алгебраического уравнения степени выше второй алгебраическим же путем, т. е. с помощью операнд сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня. Теория квадратных уравнений была известна еще в древнем Вавилоне, а решение уравнений третьей и четвертой степеней в общем виде было получено математиками эпохи Возрождения: Джироламо Кардано, Никколо Траталья и Людовико Феррари. Однако решение уравнений пятой и более высоких степеней натолкнулось на непреодолимые трудности.

В начале XIX века новое решительное наступление на эту крепость повели Луи Лагранж, П. Руффини и Нильс Хенрик Абель, а также Эварист Галуа, который использовал наиболее оригинальный метод. Все они исходили из хорошо известных фактов. Во-первых, алгебраическое уравнение n-й степени вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ имеет n корней $r_1, r_2, \ldots r_n$, и, во-вторых, полный набор этих корней определяет алгебраическое уравнение однозначно. Например, если 1 и 3 являются корнями некоего уравнения, то этим уравнением будет $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 = 0$. Коэффициенты такого уравнения представляют собой симметрические функции от его корней, т.е. не зависят от всей совокупности этих корней так, что порядок их нумерации безразличен. Например, если кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет своими корнями $r1, r2, r3$, то его коэффициенты могут быть записаны как:

$$-a = r_1 + r_2 + r_3,$$
$$b = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3,$$
$$-c = r_1 r_2 r_3.$$

Многолетняя работа над такими уравнениями позволила установить, что ключ к решению задачи выражения корней уравнения через его коэффициенты лежит не только в изучении таких симметричных выражений, но также в исследовании частично симметричных выражений и анализа симметрий, которыми они обладают. Выражение $E = r_1r_2 + r_3r$ например, не сохраняется при произвольных перестановках входящих в него символов. Но если произвести замену индекса 1 на 2 и индекса 3 на 4, то выражение E не изменится, или, как говорят в таких случаях, оно инвариантно по отношению к такой перестановке. Если же поменять местами индексы 1 и 3, то полученное при этом выражение будет уже отлично от E. С другой стороны, последовательное осуществление двух перестановок, из которых первая нарушает E, а вторая снова его восстанавливает, может быть принято за новую перестановку, по отношению к которой E инвариантно. Совокупность таких перестановок, названная Галуа "группой"отражает внутреннюю симметрию, присущую выражению E. Раскрытие природы таких групп, по мнению проницательного Галуа, и есть ключ к построению более глубокой теории алгебраический уравнений.

Вскоре математики обнаружили применимость таких перестановок и к другим областям математики. Совокупность шести движений, например, превращающих равносторонний треугольник в такой же треугольник тоже образует группу. Другие группы также оказались существенными элементами большинства областей математики. Чтобы охватить такие группы во всех их видах и проявлениях единым понятием, а также предусмотреть многочисленные скрытые в них возможности, потребовалось сформулировать основополагающее понятие группы в наиболее абстрактной форме.

Это и было сделано. Такое абстрактное определение группы оставляет, конечно, полностью открытым вопрос о конкретной "материальной"природе группы. Элементами группы могут быть числа, вращения геометрических тел, деформации пространства (подобного рода деформации могут, например, определяться линейными или какими-либо иными преобразован координат) или же, как было упомянуто выше, перестановки n объектов.

Одним из главных достижений последних 150 лет было введение понятия группы: в результате различные разделы математики обрели ясность и единообразие.

Абстрактная теория групп нашла блестящее применение в решении проблем физики элементарных частиц. Здесь возможности теории групп обуславливаются наличием довольно запутанных групп явных и скрытых симметрий во взаиморасположениях и взаимодействиях ядерных частиц. Успех теории групп в систематизации массы экспериментальных данных, а также в предсказании существования новых элементарных частиц, очевидно, свидетельствует о пользе абстракций в поиске вполне реальных истин.

В начале XX века в. Анри Пуанкаре и ряд других математиков построили великолепное здание топологической теории. Эта работа была тесно связана с развитием теории групп. Ее результаты использованы в небесной механике, в частности при построении орбит планет в пространстве, искривленном гравитационными полями.

Один из крупнейших естествоиспытателей нашего времени сказал, что математика является значительно большим, чем наука, поскольку она является языком науки. Эта фраза требует пояснения, поскольку в западных странах и США слово "наука"(science) употребляется в более узком смысле, чем в нашей стране, а именно только для обозначения естественных дисциплин и не включает в себя гуманитарных и социальных предметов. Приведенное утверждение в последние годы приобретает все большее число сторонников, поскольку к математике за помощью обращаются представители не только физики и астрономии, авиации и космонавтики, но и организаторы производства, медики, работники транспорта, агрономы и социологи. Математика стала не только орудием количественных расчетов, но и методом точного исследования и форм понятий и задач. Каждому ясно, что без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен современный прогресс физики, так бы и остались нерешенными многие принципиально важные проблемы авиации и космонавтики, метеорологии и радиотехники.

Очень хорошо об этом сказано в статье А. Я. Хинчина "Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей". Нет нужды пересказывать эти идеи, мы лучше приведем его слова.

"Основной критерий, отличающий естественнонаучную дисциплину от математической, мы видим в том характере определения свойственной данной науке области исследования, который является типичным для этих двух категорий научных дисциплин. Каждая естественнонаучная дисциплина определяется материальной спецификой своего предмета, реальными чертами той области действительного мира, которую она изучает. Именно так определяют свой предмет физика, биология, психология. Один и тот же предмет может быть изучаем самыми различными методами, в том числе и математическими. Но, переходя от одного метода к другому, мы всегда остаемся в пределах данной (естественнонаучной) дисциплины, ибо для нее реальный предмет, а не метод исследования составляет основную специфическую черту...

Напротив, определяющим признаком всякой математической дисциплины всегда является некоторый формальный метод, потенциально допускающий самые различные материальные воплощения, а, следовательно, и практические применения. Может ли быть тот или другой предмет, то или другое явление реального мира исследуемо с помощью данного математического метода - этот вопрос решается не конкретной материальной природой предмета или явления, но исключительно их формальными структурными свойствами и, прежде всего, теми количественными соотношениям и пространственными формами, в которых они живут или протекают. Пример: метод дифференциальных уравнений - в физике, химии, биологии - для применения достаточно наличия двух непрерывно меняющихся величин, изменения которых имеют определенную относительную скорость".

Математический результат обладает тем свойством, что он применим при изучении не только какого-то определенного явления или процесса, а может найти использование и во многих других, физическая природа которых принципиально отлична от ранее рассматриваемого. Так, правила арифметики применимы и в задачах экономики, и при технических расчетах, и при решении вопросов сельского хозяйства.

В статье Г. Кацивели "Математика и действительность"два лица А и Б беседуют на тему об отношении математики к реальному миру:

"А. - Разве можно сомневаться в наши дни в том, что математика имеет дело с реальным миром? А радио и телевидение, а синхрофазотроны, а космические полеты - все это связано с огромным фронтом чисто математических изысканий, при которых используется не только элементарная математика или классическое дифференциальное и интегральное исчисление, но и самые новейшие математические теории. Например, возьмем многомерные пространства - вы ведь не возражаете, что фазовые пространства в статистической механике - пространства с огромным числом измерений, что они отражают непосредственную материальную действительность, хотя бы для задач динамики газа в сосуде?

Б. - Несомненно. Но все то, что вы приводите в пример, и большое количество других, не менее впечатляющих примеров, которые мог бы привести и я, кстати, полностью оправдывающих затраты общества на содержание математиков, - все это не является основной частью математики, а лишь ее "отходами", более или менее частными и случайными. На каждый ваш пример применения математических результатов к действительности я могу привести десяток примеров великолепных математических результатов, не имеющих никакого отношения к действительному миру. Таким образом, настоящая математика имеет своим предметом математические структуры сами по себе, без связи с нуждами действительного мира. А ваш основной тезис, кроме того, не подтверждается и фактической историей математики.

А - Вот как? Можно просить Вас высказаться подробнее?

Б - Пожалуйста. Я не отрицаю, что математика возникла и развивалась под прямым воздействием практики. Из счета предметов возникла арифметика, из измерения расстояний и площадей - геометрия. Но в обеих этих областях сразу же возникла проблематика, никак не связанная с действительным миром, а именно ей, а не нуждами практики занимались великие математические умы. В арифметике это была проблема о распределении простых чисел. . . "

В этом диалоге лицо А - слишком прямолинейно отстаивает тезис о том, что математика изучает действительность. Позиция лица Б при ближайшем рассмотрении оказывается шаткой и совсем необоснованной. Изучение свойств целого положительного числа, возникшего из непосредственных нужд практики едва ли может считаться совсем не связанной с действительным миром. Создается ощущение, что лицо Б пользуется прямолинейностью лица А и выдает ему сомнительные суждения за истины в последней инстанции.

Математика не является исключением из всех областей познания - она тоже позволяет изучать явления лишь приближенно. Но следует иметь в виду, что ее выводы логически абсолютно точны и строги. Ее приближенность носит не внутренний характер, а лишь связанный с описанием реальных явлений. Уверенность в правильности математических выводов настолько велика, что если построена математическая теория того или иного явления и затем установлено, что ее выводы расходятся с опытными данными, то сомнение возникает не относительно правил математики и ее логических выводов, а относительно тех исходных предпосылок, на базе которых строилась эта теория.

Понятия математики создаются не по произволу исследователя, а являются абстракциями от реальных процессов, отношений между вещами или же абстракций над абстракциями.

Новые математические теории постоянно проверяются путем сравнения того, что они могут дать нового по сравнению с тем, что давали старые.

Математические теории, сделавшись более общими, не теряют тех объектов, которые они изучали ранее. Но, в связи с обобщением понятий расширяются возможности применений и обогащаются методы исследования. Зачастую при этом обобщение приводит к замечательному факту: если доказательство частного факта требовало больших усилий и специальных построений, то с более общих и широких позиций этот факт становится почти очевидным.

Каждый раз, когда существующий математический аппарат оказывается недостаточным для исследования интересующих практику явлений, наука ищет и рано или поздно находят новые средства (понятия, подходы, методы), которые уже оказываются достаточными для более полного и точного описания свойств этих явлений и для прогноза их поведения. Но при этом математика строит свои новые понятия и новые разделы не произвольно, а на базе того, что уже было создано ранее, и новых требований практики.

В результате математика и ее средства исследования не остаются неизменными, а подвергаются процессу непрерывного обновления, совершенствования и обогащения. И в этом обновлении и совершенствовании значительную, если не сказать решающую, роль играет общественная практика. В действительности между математикой и практикой существует постоянная двусторонняя связь: математика предлагает практике то, чем она располагает, а практика постоянно сообщает математике, что ей необходимо.

Ни у кого не вызывает сомнение то обстоятельство, что начала арифметики и геометрии были вызваны к жизни требованиями примитивной человеческой практики. Точно так же весь XVIII и XIX вв. прошли под знаком астрономии и количественного естествознания. Физика и астрономия широко использовали математические средства и одновременно выдвигали перед математикой новые вопросы, которые нуждались не только в использовании традиционных методов, но и в развитии новых, а также в развитии целых областей математики. Так первые же попытки построения теории распространения тепла в твердых и жидких телах, изучение упругих свойств материалов магнитных и электрических явлений и еще ряда других привели к необходимости решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также теории функций комплексного переменного. Исследования устойчивости движения планет солнечной системы, устойчивых форм вращающихся жидких масс (теория образования планет) привели к созданию теории устойчивости движения. В XX веке эта теория получила разнообразные применения далеко за пределами астрономии - в авиации, расчетах быстровращающихся агрегатов технических систем и пр. Астрономические наблюдения и развитие экспериментальных исследований остро выдвинули проблему разработки теории ошибок наблюдений. Идеи о молекулярном строении материи существенно повысили требования к теории вероятностей и дали мощный толчок ее развитию. От физики, но уже в XX в., берут свое начало такие большие и важные в наши дни дисциплины, как функциональный анализ, теория случайных процессов, теория обобщенных функций. В биологии, психологии и других науках следует искать начала математической статистики, а в химии - планирование эксперимента.

Цели математизации естественных и гуманитарных наук можно сформулировать таким образом: из точно сформулированных предпосылок выводить логические следствия, в том числе и такие, которые доступны наблюдению; сделать доступными логическому и количественному анализу сложные и запутанные процессы, на которые, как правило, наслаивается множество второстепенных влияний; посредством математического анализа описывать не только уже установленные факты, но и предсказывать новые закономерности; получить возможность прогнозировать течение явлений, добиваясь не только качественного, но и количественного согласия с реальным их протеканием.

Если эти предсказания оправдываются, то теория укрепляет свое положение и накапливает дальнейшие выводы. Однако рано или поздно, поскольку математическая теория описывает реальные процессы лишь приближенно, обязательно наступит момент, когда какое-то следствие теории не подтверждается практикой или экспериментом, или же какой-то опытный факт останется необъяснимым теорией. Это будет означать недостаточность теории, ее слабость, необходимость ее уточнения и дальнейшего совершенствования. В этом случае становится необходимым пересмотр исходных посылок теории, изменение тех фундаментальных положений, которые казались незыблемыми и были положены в ее основу.

С такого рода затруднениями встретилась аэродинамика. В конце тридцатых годов двадцатого века, когда скорости самолетов поднялись с 200-300 км/ч до 600-700 км/ч. предположение о несжимаемости воздуха оказалось уже неприемлемым. От него следовало отказаться и строить аэродинамику больших скоростей. Точно так же позднее, когда скорости самолетов достигли скорости звука, выявила свою недостаточность и теория полета самолетов с большими, но дозвуковыми скоростями. Ту же картину можно проследить на любой другой дисциплине, как прикладной, так и теоретической: теория развивается в определенных предпосылках до тех пор, пока она не приходит в противоречие с предъявляемыми к ней требованиями, когда она уже перестает давать новое. В этот момент требуется пересмотр начал теории из более глубоких предпосылок.

В результате можно сказать, что математизация наших знаний состоит не столько в том, чтобы использовать готовые математические методы и результаты, а в том, чтобы создавать тот специфический математический подход, который бы позволил наиболее точно и полно описывать интересующий нас круг явлений, выводить необходимые следствия и использовать полученные результаты для практической деятельности. Так случилось с математикой, когда в начале XIX века созрело время для изучения физических явлений переноса теплоты, магнитных и электрических явлений, построения волновой оптики. Именно тогда был разработан аппарат уравнений математической физики. Точно так же в конце XVII - начале XVIII в. насущной необходимостью для человечества была разработка методов движения. И мы знаем, что такой метод был найден и разработан, а именно И. Ньютон, Г. Лейбниц, их предшественники, современники и последователи разработали математический анализ, ставший мощным методом решения задач естествознания и инженерной практики.

"Существует еще одна причина высокой репутации математики: именно математика дает точным естественным наукам определенную меру уверенности в выводах, достичь которой без математики они не могут".

А. Эйнштейн.

2 Список литературы

- "Новое в жизни, науке, технике", 1982 №8.
- "Новое в жизни, науке, технике", 1983 №7.

Author WWW: http://slava.fateback.com
Author E-Mail: mailto:deadbeef@so.yandex.ru

Article WWW: http://slava.fateback.com/work/docs/kse.pdf